Les suites numériques

Analyse 1

Les suites numériques

Analyse 1

Définition

*Une suite réelle (où numérique) $(u_n)_{n\geq n_0}$, est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui associe a tout entier $n \geq n_0$ un réel $u(n)$ que l'on **notera** u_n.*

- *u_n est appelé **le terme général** de la suite.*
- *u_{n_0} est appelé **le premier terme**.*

Définition

Une suite réelle (où numérique) $(u_n)_{n \geq n_0}$, *est une application* $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui associe a tout entier* $n \geq n_0$ *un réel* $u(n)$ *que l'on* ***notera*** u_n.

- u_n *est appelé* ***le terme général*** *de la suite.*
- u_{n_0} *est appelé* ***le premier terme.***

Une suite peut être définie :

Définition

Une suite réelle (où numérique) $(u_n)_{n \geq n_0}$, *est une application* $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui associe a tout entier* $n \geq n_0$ *un réel* $u(n)$ *que l'on* ***notera*** u_n.

- u_n *est appelé* ***le terme général*** *de la suite.*
- u_{n_0} *est appelé* ***le premier terme****.*

Une suite peut être définie :

1. ***Sous forme explicite***. Par exemple, la suite de terme général

$$u_n = n - 2n^2, \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Définitions et Notations

Définition

*Une suite réelle (où numérique) $(u_n)_{n \geq n_0}$, est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui associe a tout entier $n \geq n_0$ un réel $u(n)$ que l'on **notera** u_n.*

- *u_n est appelé **le terme général** de la suite.*
- *u_{n_0} est appelé **le premier terme**.*

Une suite peut être définie :

1. ***Sous forme explicite***. Par exemple, la suite de terme général

$$u_n = n - 2n^2, \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

2. ***Sous forme récurrentes***. Par exemple, la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *une suite arithmétique* s'il existe un nombre r tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r \quad u_0 \ \textit{donné}$$

Le nombre r s'appelle *la raison* de la suite

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *une suite arithmétique* s'il existe un nombre r tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r \quad u_0 \ \textit{donné}$$

Le nombre r s'appelle *la raison* de la suite

Propriétés

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r, alors

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad u_n = u_0 + nr$
- D'une manière générale, pour tout $n, p \in \mathbb{N} \quad u_n = u_p + (n-p)r$.

Exemple : Soit la suite de terme général $u_n = n$.
On a $u_{n+1} - u_n = 1$ donc c'est une suite arithmétique de raison 1.

Suites arithmétiques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r alors

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n = (n-m+1)\frac{(u_m+u_n)}{2}$$

Ce qu'on retient en disant :

$$\textit{Somme de termes} = \textit{nombre de termes}\,\frac{\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}}{2}$$

Exemple : Soit $u_n = n$ alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = (n+1)\frac{(0+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée une *suite géométrique* s'il existe un nombre q tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n \quad u_0 \ \textit{donné}$$

Le nombre q s'appelle *la raison* de la suite.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée une ***suite géométrique*** s'il existe un nombre q tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n \quad u_0 \ \textit{donné}$$

Le nombre q s'appelle ***la raison*** de la suite.

Propriétés

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, alors

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 q^n$
- D'une manière générale, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ $u_n = u_p q^{n-p}$

Preuve : Par récurrence on a :

$$u_n = q u_{n-1} = q(q u_{n-2}) = q^2 u_{n-2} = \ldots = q^n u_0$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

Ce qu'on retient en disant :

$$\boldsymbol{Somme\ de\ termes} = \boldsymbol{Premier\ terme} \times \frac{1 - \boldsymbol{La\ raison}^{\boldsymbol{nombre\ de\ termes}}}{1 - \boldsymbol{La\ raison}}$$

Preuve : Pour $m = 0$, on a

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0(1 + q + \ldots + q^n)$$

En multipliant par $1 - q$, on obtient immédiatement,

$$(1-q)S_n = u_0(1 + q + \ldots + q^n)(1-q) = u_0(1 - q^{n+1})$$

Suites monotones

Définition

1. *Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.*

Suites monotones

Définition

1. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite croissante si pour tout* $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
2. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite décroissante si pour tout* $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Suites monotones

Définition

1. *Une suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est dite croissante si pour tout* $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
2. *Une suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est dite décroissante si pour tout* $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
3. *Une suite est dite* ***monotone*** *si elle est soit croissante, soit décroissante.*

Définition

1. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite croissante si pour tout* $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
2. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite décroissante si pour tout* $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
3. *Une suite est dite* ***monotone*** *si elle est soit croissante, soit décroissante.*

Lorsque les inégalités sont strictes la suite est strictement croissante (resp.décroissante, monotone).

Suites monotones

Définition

1. *Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.*
2. *Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.*
3. *Une suite est dite **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.*

Lorsque les inégalités sont strictes la suite est strictement croissante (resp.décroissante, monotone).

Remarque

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement positive c'est-à-dire $\forall n,\ u_n > 0$ alors le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ peut être étudier de la façon suivante :

- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Définition

1. *Une suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est dite* ***constante*** *si* $\forall n \geq n_0; \quad u_n = u_{n+1}$

Définition

1. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite* ***constante*** *si* $\forall n \geq n_0; \quad u_n = u_{n+1}$
2. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite* ***stationnaire*** *à partir du rang* $p \geq n_0$ *si* $\forall n \geq p, \;\; u_n = u_p$.

Définition

1. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite* ***constante*** *si* $\forall n \geq n_0; \quad u_n = u_{n+1}$
2. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite* ***stationnaire*** *à partir du rang* $p \geq n_0$ *si* $\forall n \geq p, \; u_n = u_p$.

Remarque importante

Une suite peut ne pas être ni croissante ni décroissante. Par exemple la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme générale

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

les termes successifs sont : $\frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}$... Cette suite n'est pas monotone.

Exemples.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = n^2 + n + 2$. On a

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 2 - (n^2 + n + 2) = 2n + 2 > 0, \quad \forall n \geq 0$$

donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante.

Exemples.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = n^2 + n + 2$. On a

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 2 - (n^2 + n + 2) = 2n + 2 > 0, \quad \forall n \geq 0$$

donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante.

2. Soit la suite $(v_n)_{n\geq 19}$ définie par $v_n = \dfrac{20^n}{n!}$. Puisque $v_n > 0$, on calcule

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{20^{n+1}}{(n+1)!}\right) \times \left(\frac{n!}{20^n}\right) = \frac{20}{n+1}$$

or pour tout $n \geq 19$ on a $n+1 \geq 20$ donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$$

d'où $(v_n)_{n\geq 19}$ est une suite décroissante.

Suites bornées

Suites bornées

Définition

1. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite majorée s'il existe un réel* $M \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.
2. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite minorée s'il existe un réel* $m \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $n \geq n_0$, $u_n \geq m$.
3. *Une suite est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

Suites bornées

Définition

1. *Une suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est dite majorée s'il existe un réel* $M \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $n \geq n_0$, $u_n \leq M$ *.*
2. *Une suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est dite minorée s'il existe un réel* $m \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $n \geq n_0$, $u_n \geq m$*.*
3. *Une suite est dite* ***bornée*** *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Caractérisation des suites bornées

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée ssi il existe un réel positif A tel que l'on ait

$$\forall n \geq n_0; \quad |u_n| \leq A$$

Exemples :

1. La suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est *bornée mais n'est pas monotone*. En effet, pour tout $n \geq 1$

$$|(-1)^n| = 1 \Longrightarrow |u_n| = \frac{1}{n} \leq 1$$

Exemples :

1. La suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est ***bornée mais n'est pas monotone***. En effet, pour tout $n \geq 1$

$$|(-1)^n| = 1 \Longrightarrow |u_n| = \frac{1}{n} \leq 1$$

2. La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = e^{2-n}$ est ***bornée et décroissante***. En effet, pour tout $n \geq 0$, on a

$$2 - n \leq 2 \Longrightarrow 0 < e^{2-n} \leq e^2 \Longrightarrow |v_n| \leq e^2$$

De plus

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^2 e^{-n-1}}{e^2 e^{-n}} = \frac{1}{e} \leq 1$$

Exemples :

1. La suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est *bornée mais n'est pas monotone*. En effet, pour tout $n \geq 1$
$$|(-1)^n| = 1 \Longrightarrow |u_n| = \frac{1}{n} \leq 1$$

2. La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_n = e^{2-n}$ est *bornée et décroissante*. En effet, pour tout $n \geq 0$, on a
$$2 - n \leq 2 \Longrightarrow 0 < e^{2-n} \leq e^2 \Longrightarrow |v_n| \leq e^2$$
De plus
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^2 e^{-n-1}}{e^2 e^{-n}} = \frac{1}{e} \leq 1$$

3. La suite $w_n = 2^n$ est *croissante mais n'est pas majorée*. En effet, c'est est clair qu'elle est croissante. Supposons $(w_n)_n$ est majorée c-à-d $\exists M > 0,\ \forall n \geq 0, w_n = 2^n \leq M \Longrightarrow \exists \mathbf{M} > \mathbf{1},\ \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{0}\ \mathbf{n} \leq \frac{\ln(\mathbf{M})}{\ln(\mathbf{2})}$ ce qui est absurde car l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majorée.

Suite convergente

On dit que la suite de nombres réelles $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \geq n_0 \ \ \textbf{\textit{tel que}} : \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \geq n_0 \ \ \text{tel que} : \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

On note alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

Si le réel ℓ n'existe pas, la suite est dite divergente.

Suite convergente

On dit que la suite de nombres réelles $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \geq n_0 \ \ \textit{tel que}: \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \geq n_0 \ \ \text{tel que}: \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

On note alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

Si le réel ℓ n'existe pas, la suite est dite divergente.

Remarque

Si la limite n'existe pas, la suite est dite divergente.

Exemple. En utilisant la définition, montrons que

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0} \text{ converge vers } 0$$

En effet, on veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \geq 0 \ \text{ tel que : } \forall n \geq N_\varepsilon \ \ |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Exemple. En utilisant la définition, montrons que

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0} \text{ converge vers } 0$$

En effet, on veut montrer que

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \geq 0 \;\; \text{tel que :} \;\; \forall n \geq N_\varepsilon \;\; |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$$\left(\frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Exemple. En utilisant la définition, montrons que

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0} \text{ converge vers } 0$$

En effet, on veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \geq 0 \ \text{ tel que : } \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$$\left(\frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Soit $\forall \varepsilon > 0$.

Exemple. En utilisant la définition, montrons que

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0} \text{ converge vers } 0$$

En effet, on veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \geq 0 \ \text{ tel que : } \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$$\left(\frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Soit $\forall \varepsilon > 0$. On pose $N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \in \mathbb{N}$, donc

$$Si \ \ n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow n \geq E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Exercice (TD) : En utilisant la définition, montrer que

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0} \quad \text{converge vers } 0$$

Réponse. On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \geq 0 \ \text{ tel que : } \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ |\frac{1}{2^n}| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

$$\left(\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n\ln(2) \Longleftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} > 0 \ si \ \varepsilon < 1\right)$$

Exercice (TD) : En utilisant la définition, montrer que

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0} \quad \text{converge vers } 0$$

Réponse. On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \geq 0 \ \text{ tel que : } \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ |\frac{1}{2^n}| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

$$\left(\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n\ln(2) \Longleftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} > 0 \ si \ \varepsilon < 1\right)$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$.

Exercice (TD) : En utilisant la définition, montrer que

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0} \quad \text{converge vers } 0$$

Réponse. On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \geq 0 \;\; \text{tel que : } \; \forall n \geq N_\varepsilon \;\; |\frac{1}{2^n}| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

$$\left(\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n\ln(2) \Longleftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} > 0 \; si \; \varepsilon < 1\right)$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$. On pose $N_\varepsilon = E\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}\right) + 1 \in \mathbb{N}$, donc on obtient

$$\forall n \geq N_\varepsilon \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \Longrightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Unicité de la limite

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers une limite alors cette limite est unique.

Unicité de la limite

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers une limite alors cette limite est unique.

Preuve : Supposons que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2. Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$$

Unicité de la limite

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers une limite alors cette limite est unique.

Preuve : Supposons que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2. Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tel que

$$\forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ |u_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Unicité de la limite

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers une limite alors cette limite est unique.

Preuve : Supposons que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2. Montrons que

$$\forall\varepsilon > 0 \quad |\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tel que

$$\forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ |u_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{$*$}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Unicité de la limite

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers une limite alors cette limite est unique.

Preuve : Supposons que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2. Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tel que

$$\forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ |u_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Il vient, d'après l'inégalité triangulaire et $(*)$,

$$\forall n \geq N \quad 0 < |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| < \varepsilon.$$

Unicité de la limite

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers une limite alors cette limite est unique.

Preuve : Supposons que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2. Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tel que

$$\forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ |u_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Il vient, d'après l'inégalité triangulaire et $(*)$,

$$\forall n \geq N \quad 0 < |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| < \varepsilon.$$

On abouti donc à

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon \Longleftrightarrow |\ell_1 - \ell_2| = 0 \Longleftrightarrow \ell_1 = \ell_2$$

■

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite convergente vers ℓ. Prenons $\varepsilon = 1$.

$$\exists N \geq n_0 \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < 1. \qquad (*)$$

Notons $M_1 = max\{|u_{n_0}|, \ldots, |u_{N-1}|\}$, $M_2 = |\ell| + 1$ et $M = max(M_1, M_2)$. Pour tout $n \geq n_0$, on a deux cas :

- si $n_0 \leq n \leq N-1$, on a $\qquad |u_n| \leq M_1 \leq M$,
- si $n \geq N$, on a d'après $(*)$ et l'inégalité triangulaire,

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell| = M_2 \leq M.$$

d'où $\qquad \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M$ ■

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Remarque

La réciproque est fausse. Pour le voir, considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = (-1)^n$ qui est bornée ($|u_n| \leq 1$) mais n'est pas convergente car,

- Si n et pair on aura $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} u_n = 1$
- Si n et impair on aura $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} u_n = -1$

donc elle n'admet pas de limite.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $+\infty$ ssi

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}(\boldsymbol{où}\ \mathbb{R}^+),\ \exists N \geq n_0\ \boldsymbol{tel\ que}\, \forall n \geq N, u_n > A.$$

2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ ssi

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty \Longleftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}(\boldsymbol{où}\ \mathbb{R}^-),\ \exists N \geq n_0\ \boldsymbol{tel\ que}\, \forall n \geq N, u_n < B.$$

Exemple :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha > 0 \\ 0 & si\ \alpha < 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Exemple : En utilisant la définition, montrer que

$$(\sqrt{n})_{n\geq 0} \text{ tend vers } +\infty$$

On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R}(\text{où } \mathbb{R}^+),\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n > A.$$

Exemple : En utilisant la définition, montrer que

$$(\sqrt{n})_{n\geq 0} \text{ tend vers } +\infty$$

On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R}(\text{où } \mathbb{R}^+),\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n > A.$$

(c-à-d $\exists N \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N, \sqrt{n} > A \iff n > A^2$.)

Exemple : En utilisant la définition, montrer que

$$(\sqrt{n})_{n\geq 0} \text{ tend vers } +\infty$$

On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R}(\text{où } \mathbb{R}^+),\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n > A.$$

(c-à-d $\exists N \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N, \sqrt{n} > A \Longleftrightarrow n > A^2$.)
Soit $A \in \mathbb{R}$, prenons $N = E(A^2) + 1$. On a, $N > A^2$ et donc pour tout $n \geq N$, $u_n > A$.

Exercice(TD). En utilisant la définition, montrer que

$$(\ln(n^2+1))_{n\geq 0} \text{ tend vers } +\infty$$

Réponse. On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R}(\text{où } \mathbb{R}^+),\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n > A.$$

Exercice(TD). En utilisant la définition, montrer que

$$(\ln(n^2+1))_{n\geq 0} \text{ tend vers } +\infty$$

Réponse. On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R}(\text{où } \mathbb{R}^+),\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n > A.$$

(c-à-d
$\exists N \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N, \ln(n^2+1) > A \Longleftrightarrow n^2 > e^A - 1 \Longleftarrow n > \sqrt{|e^A - 1|}$.)

Exercice(TD). En utilisant la définition, montrer que

$$(\ln(n^2+1))_{n\geq 0} \text{ tend vers } +\infty$$

Réponse. On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R}(\text{où } \mathbb{R}^+),\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n > A.$$

(c-à-d
$\exists N \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N, \ln(n^2+1) > A \Longleftrightarrow n^2 > e^A - 1 \Longleftarrow n > \sqrt{|e^A - 1|}$.)
Soit $A \in \mathbb{R}^+$, prenons $N = E(\sqrt{e^A - 1}) + 1$. On a donc pour tout $n \geq N$, $u_n > A$.

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Alors, on a :

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Alors, on a :

1. La suite somme $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$.

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad \boldsymbol{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Alors, on a :

1. La suite somme $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n+v_n) = \ell_1+\ell_2$.
2. La suite produit $(u_nv_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_nv_n) = \ell_1\ell_2$. En particulier pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(au_n) = a\ell_1$.

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad \boldsymbol{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Alors, on a :

1. La suite somme $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n+v_n) = \ell_1+\ell_2$.
2. La suite produit $(u_nv_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_nv_n) = \ell_1\ell_2$. En particulier pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(au_n) = a\ell_1$.

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Alors, on a :

1. La suite somme $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$.
2. La suite produit $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n v_n) = \ell_1\ell_2$. En particulier pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(au_n) = a\ell_1$.
3. Si pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ et $\ell_2 \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell_2}$.

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Alors, on a :

1. La suite somme $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$.
2. La suite produit $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n v_n) = \ell_1\ell_2$. En particulier pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(au_n) = a\ell_1$.
3. Si pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ et $\ell_2 \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell_2}$.
4. Si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ (respectivement $u_n < v_n$), alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Alors, on a :

1. La suite somme $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n+v_n) = \ell_1+\ell_2$.
2. La suite produit $(u_nv_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, de plus on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_nv_n) = \ell_1\ell_2$. En particulier pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(au_n) = a\ell_1$.
3. Si pour tout $n\geq n_0$, $v_n\neq 0$ et $\ell_2\neq 0$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell_2}$.
4. Si pour tout $n\geq n_0$, $u_n\leq v_n$ (respectivement $u_n<v_n$), alors $\ell_1\leq\ell_2$.

Exemple : On a $\forall n\geq 1$, $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$ mais $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$$

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$$

d'après l'inégalité triangulaire on a

$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2|$

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{d'après l'inégalité triangulaire on a} \\ |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?} \end{array} \right)$$

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{d'après l'inégalité triangulaire on a} \\ |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?} \end{array} \right)$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{d'après l'inégalité triangulaire on a} \\ |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?} \end{array} \right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \Longrightarrow \exists N_1 \geq n_0,\ \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell_2 \Longrightarrow \exists N_2 \geq n_0,\ \forall n \geq N_2,\ |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{d'après l'inégalité triangulaire on a} \\ |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?} \end{array} \right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \Longrightarrow \exists N_1 \geq n_0,\ \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell_2 \Longrightarrow \exists N_2 \geq n_0,\ \forall n \geq N_2,\ |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $N = max(N_1, N_2)$.

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \geq N \quad |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{d'après l'inégalité triangulaire on a} \\ |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?} \end{array} \right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \Longrightarrow \exists N_1 \geq n_0,\ \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell_2 \Longrightarrow \exists N_2 \geq n_0,\ \forall n \geq N_2,\ |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $N = max(N_1, N_2)$. Il vient que

$$\forall n \geq N,\ |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

(2) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$$

(2) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Commençons par remarquer que} \\ |u_n v_n - \ell_1\ell_2| = |(u_n - \ell_1)v_n + (v_n - \ell_2)\ell_1| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?} \underbrace{|v_n|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?}|\ell_1| \end{array} \right)$$

(2) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Commençons par remarquer que} \\ |u_n v_n - \ell_1\ell_2| = |(u_n - \ell_1)v_n + (v_n - \ell_2)\ell_1| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?}\underbrace{|v_n|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?}|\ell_1| \end{array} \right)$$

$(v_n)_{n \geq n_0}$, étant convergente, elle est bornée donc $\exists M > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ |v_n| \leq M.$$

(2) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Commençons par remarquer que} \\ |u_n v_n - \ell_1\ell_2| = |(u_n - \ell_1)v_n + (v_n - \ell_2)\ell_1| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?}\underbrace{|v_n|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?}|\ell_1| \end{array} \right)$$

$(v_n)_{n \geq n_0}$, étant convergente, elle est bornée donc $\exists M > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ |v_n| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

(2) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Commençons par remarquer que} \\ |u_n v_n - \ell_1\ell_2| = |(u_n - \ell_1)v_n + (v_n - \ell_2)\ell_1| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?}\underbrace{|v_n|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?}|\ell_1| \end{array} \right)$$

$(v_n)_{n \geq n_0}$, étant convergente, elle est bornée donc $\exists M > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ |v_n| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \Longrightarrow \exists N_1 \geq n_0,\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

(2) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Commençons par remarquer que} \\ |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| = |(u_n - \ell_1) v_n + (v_n - \ell_2)\ell_1| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?} \underbrace{|v_n|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?} |\ell_1| \end{array} \right)$$

$(v_n)_{n \geq n_0}$, étant convergente, elle est bornée donc $\exists M > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \ |v_n| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \Longrightarrow \exists N_1 \geq n_0, \ \forall n \geq N_1, \ |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell_2 \Longrightarrow \exists N_2 \geq n_0, \ \forall n \geq N_2, \ |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)}.$$

(2) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Commençons par remarquer que} \\ |u_n v_n - \ell_1\ell_2| = |(u_n - \ell_1)v_n + (v_n - \ell_2)\ell_1| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?}\underbrace{|v_n|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?}|\ell_1| \end{array} \right)$$

$(v_n)_{n \geq n_0}$, étant convergente, elle est bornée donc $\exists M > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ |v_n| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \Longrightarrow \exists N_1 \geq n_0,\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell_2 \Longrightarrow \exists N_2 \geq n_0,\ \forall n \geq N_2,\ |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)}.$$

Posons $N = max(N_1, N_2)$.

(2) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Commençons par remarquer que} \\ |u_n v_n - \ell_1\ell_2| = |(u_n - \ell_1)v_n + (v_n - \ell_2)\ell_1| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{?}\underbrace{|v_n|}_{?} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{?}|\ell_1| \end{array} \right)$$

$(v_n)_{n \geq n_0}$, étant convergente, elle est bornée donc $\exists M > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ |v_n| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \Longrightarrow \exists N_1 \geq n_0,\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell_2 \Longrightarrow \exists N_2 \geq n_0,\ \forall n \geq N_2,\ |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)}.$$

Posons $N = max(N_1, N_2)$. Il vient que

$$\forall n \geq N,\ |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)}(|\ell_1| + 1) < \varepsilon.$$

■

Proposition

1. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement vers* $-\infty$*) et si* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite minorée (respectivement majorée), alors* $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement vers* $-\infty$*).*

Proposition

1. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement vers* $-\infty$*) et si* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite minorée (respectivement majorée), alors* $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement vers* $-\infty$*).*
2. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $\pm\infty$ *et si* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite convergente de limite non nulle alors leurs produit* $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $\pm\infty$ *selon le signe de* $(v_n)_{n\geq n_0}$

Opérations algébriques sur les suites divergentes vers ∞

Proposition

1. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement vers* $-\infty$*) et si* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite minorée (respectivement majorée), alors* $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement vers* $-\infty$*).*
2. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $\pm\infty$ *et si* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite convergente de limite non nulle alors leurs produit* $(u_nv_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $\pm\infty$ *selon le signe de* $(v_n)_{n\geq n_0}$
3. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $\pm\infty$ *alors* $\dfrac{1}{u_n}$ *converge vers 0*

Proposition

1. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement vers* $-\infty$*) et si* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite minorée (respectivement majorée), alors* $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement vers* $-\infty$*).*
2. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $\pm\infty$ *et si* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite convergente de limite non nulle alors leurs produit* $(u_nv_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $\pm\infty$ *selon le signe de* $(v_n)_{n\geq n_0}$
3. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $\pm\infty$ *alors* $\dfrac{1}{u_n}$ *converge vers 0*
4. *Si* u_n *tend vers 0 et* $u_n>0$ *(respectivement* $u_n<0$ *) alors* $\dfrac{1}{u_n}$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement vers* $-\infty$*)*

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \geq n_0,\ (\forall n \geq N \Longrightarrow u_n + v_n > A)$$

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \geq n_0,\ (\forall n \geq N \Longrightarrow u_n + v_n > A)$$

On a $(v_n)_{\geq n_0}$ une suite minorée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$v_n \geq M$$

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \geq n_0,\ (\forall n \geq N \Longrightarrow u_n + v_n > A)$$

On a $(v_n)_{\geq n_0}$ une suite minorée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$v_n \geq M$$

Soit $A \in \mathbb{R}$,

Preuve : (1) On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \geq n_0,\ (\forall n \geq N \Longrightarrow u_n + v_n > A)$$

On a $(v_n)_{\geq n_0}$ une suite minorée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$v_n \geq M$$

Soit $A \in \mathbb{R}$, donc il existe $N \geq n_0$ tel que

$$n \geq N \Longrightarrow u_n > A - M$$

Par conséquent ; on obtient $\forall n \geq N$

$$u_n + v_n > A$$

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites réelles. On suppose que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq w_n \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell.$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell.$$

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites réelles. On suppose que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq w_n \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell.$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tels que

$$\forall n \geq N_1,\ \ell-\varepsilon < u_n < \varepsilon+\ell \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ \ell-\varepsilon < v_n < \varepsilon+\ell.$$

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites réelles. On suppose que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq w_n \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell.$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tels que

$$\forall n \geq N_1,\ \ell - \varepsilon < u_n < \varepsilon + \ell \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ \ell - \varepsilon < v_n < \varepsilon + \ell.$$

Posons $N = max(N_1, N_2)$.

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites réelles. On suppose que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq w_n \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell.$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tels que

$$\forall n \geq N_1,\ \ell-\varepsilon < u_n < \varepsilon+\ell \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ \ell-\varepsilon < v_n < \varepsilon+\ell.$$

Posons $N = max(N_1, N_2)$. Il vient

$$\forall n \geq N, \quad \ell-\varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < \varepsilon+\ell \Longrightarrow w_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$$

Ceci montre que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell.$ ■

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ telles que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors :

1. Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$.

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ telles que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors :

1. Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : Soit $A > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$. Or $v_n \geq u_n$, pour tout $n \geq n_0$ on déduit alors que,

$$\forall n \geq N \quad v_n > A \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$$

.

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ telles que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors :

1. Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : Soit $A > 0$. Puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$. Or $v_n \geq u_n$, pour tout $n \geq n_0$ on déduit alors que,

$$\forall n \geq N \quad v_n > A \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

.

Obtention de convergence

Si à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell$

Exemple : Etudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = n\sin(n) + n^2$.

Exemple : Etudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = n\sin(n) + n^2$.

(1) On sait que $\forall n$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Longrightarrow \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

or $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$$

d'où $(u_n)_n$ est convergente.

Exemple : Etudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = n\sin(n) + n^2$.

(2) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sin(n) \geq -1 \Longrightarrow u_n \geq n^2 - n$$

or $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^2 - n = +\infty$ alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

d'où $(u_n)_n$ est divergente.

Exercice (TD). Etudier les suites suivantes ;

1. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$ 2. $u_n = \dfrac{E((n + \frac{1}{2})^2)}{E((n - \frac{1}{2})^2)}$

Exercice (TD). Etudier les suites suivantes ;

1. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$ 2. $u_n = \dfrac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)}$

Réponse.
1. On écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{5n}\left(\frac{1+\frac{(-1)^n}{2n}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n}}\right)$$

or d'aprés le critère d'encadrement ; on peut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{5n} = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{5}$$

Exercice (TD). Etudier les suites suivantes ;

$$1.\ u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}} \qquad 2.\ u_n = \frac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)}$$

Réponse.

2. On a

$$(n + \frac{1}{2})^2 - 1 < E\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right) \leq (n + \frac{1}{2})^2$$

$$(n - \frac{1}{2})^2 - 1 < E\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right) \leq (n - \frac{1}{2})^2$$

donc

$$\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - 1}{(n-\frac{1}{2})^2} < u_n < \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2 - 1}$$

or

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})^2 - 1}{(n-\frac{1}{2})^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2 - 1} = 1$$

d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

Théorème des suites monotones

1. Toute suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ croissante majorée est convergente et, en plus, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \sup_{n\geq n_0} u_n \triangleq \sup\{u_n;\ n\geq n_0\}$$

2. Toute suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ décroissante minorée est convergente et, en plus, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \inf_{n\geq n_0} u_n \triangleq \inf\{u_n;\ n\geq n_0\}$$

3. Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Remarque

Ce théorème dit que si une suite est croissante alors soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$.

Théorème des suites monotones

1. Toute suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ croissante majorée est convergente et, en plus, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \sup_{n\geq n_0} u_n \triangleq \sup\{u_n;\ n\geq n_0\}$$

2. Toute suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ décroissante minorée est convergente et, en plus, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \inf_{n\geq n_0} u_n \triangleq \inf\{u_n;\ n\geq n_0\}$$

3. Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Exemple : Etudier la nature de la suite : $u_n = \frac{n!}{n^n},\ n\geq 1.$

On a pour tout $n\geq 1$, $\quad u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1$

donc $(u_n)_n$ est minorée par 0 et décroissante, on conclut qu'elle est convergente.

Preuve

1. Supposons que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante majorée et notons

$$\ell = \sup_{n\geq n_0} u_n = \sup\{u_n;\ n \geq n_0\}$$

qui existe d'après la propriété de la borne supérieure.
Soit $\varepsilon > 0$.

Preuve

1. Supposons que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante majorée et notons

$$\ell = \sup_{n\geq n_0} u_n = \sup\{u_n;\ n \geq n_0\}$$

qui existe d'après la propriété de la borne supérieure.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq \ell. \qquad (ii')$$

Preuve

1. Supposons que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante majorée et notons

$$\ell = \sup_{n \geq n_0} u_n = \sup\{u_n;\ n \geq n_0\}$$

qui existe d'après la propriété de la borne supérieure.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq \ell. \qquad (ii')$$

Maintenant, puisque la suite est croissante, il vient

$$\forall n \geq N,\ \ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon. \Longrightarrow \forall n \geq N,\ \ u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Ceci montre que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Preuve

1. Supposons que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante majorée et notons

$$\ell = \sup_{n\geq n_0} u_n = \sup\{u_n;\ n \geq n_0\}$$

qui existe d'après la propriété de la borne supérieure.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq \ell. \qquad (ii')$$

Maintenant, puisque la suite est croissante, il vient

$$\forall n \geq N,\ \ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon. \Longrightarrow \forall n \geq N,\ u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$.

2. Pour une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ décroissante minorée, la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante majorée et $\sup\limits_{n\geq n_0}(-u_n) = -\inf\limits_{n\geq n_0} u_n$ et ce qui précède permet de conclure.

■

Exercice (TD). Soit $u_0 > 0$ et (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$

1. Trouver une relation de récurrence simple entre u_{n+1} et u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Réponse.

(1) D'abord puisque $u_0 > 0$ on peut montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$. De plus, puisque

$$u_n = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k} \Longrightarrow u_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

donc

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Exercice (TD). Soit $u_0 > 0$ et (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$

1. Trouver une relation de récurrence simple entre u_{n+1} et u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Réponse.

(2) On a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} > 0$$

d'où la suite $(u_n)_n$ est croissante.

Exercice (TD). Soit $u_0 > 0$ et (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$

1. Trouver une relation de récurrence simple entre u_{n+1} et u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Réponse.

(3) Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ, alors puisque $(u_n)_n$ est croissante et $u_0 > 0$ on aura $\ell > 0$. D'autre part en passant à la limite dans l'équation $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$, on trouve que ℓ vérifie

$$\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell} \Longleftrightarrow \ell = 0$$

ce qui contredit $\ell > 0$, donc $(u_n)_n$ ne converge pas. D'aprés le théorème des suites monotones, la suite $(u_n)_n$ va sûrement diverger vers $+\infty$.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ alors on a

(i) Si $\ell < 1$, la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

(ii) Si $\ell > 1$, la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

(iii) Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ alors on a

(i) Si $\ell < 1$, la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

(ii) Si $\ell > 1$, la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

(iii) Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire.

Preuve : (i) Pour $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$, il exite $N \geq n_0$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \ell-\varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell+\varepsilon \Longrightarrow 0 \leq \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{\ell+1}{2} = \rho \Longrightarrow |u_{n+1}| \leq \rho\,|u_n|$$

Par récurrence on obtient $\quad |u_n| \leq \rho\,|u_{n-1}| \leq \rho(\rho\,|u_{n-2}|) < \ldots < \rho^{n-N}\,|u_N|$
Puisque $0 < \ell < 1$ alors $0 < \rho < 1$ et donc ρ^{n-N} tend vers 0, on en déduit le résultat. ∎

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors :

1. $\alpha = \sup A$ si et seulement si α est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \alpha$.

Caractérisation séquentielle de la borne sup et la borne inf

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors :

1. $\alpha = \sup A$ si et seulement si α est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \alpha$.
2. $\beta = \inf A$ si et seulement si β est un minorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \beta$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors :

1. $\alpha = \sup A$ si et seulement si α est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \alpha$.
2. $\beta = \inf A$ si et seulement si β est un minorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \beta$.
3. A n'est pas majoré si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Caractérisation séquentielle de la borne sup et la borne inf

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors :

1. $\alpha = \sup A$ si et seulement si α est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \alpha$.
2. $\beta = \inf A$ si et seulement si β est un minorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \beta$.
3. A n'est pas majoré si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = +\infty$.
4. A n'est pas minoré si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

Preuve. *(1)* Supposons que $\alpha = \sup A$. D'après la caractérisation de la borne supérieur, pour tout $n > 0$, il existe un élément $a_n \in A$ tel que

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n \leq \alpha.$$

Le critère de comparaison implique que la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de points de A qui converge vers α.

Preuve. *(1)* Supposons que $\alpha = \sup A$. D'après la caractérisation de la borne supérieur, pour tout $n > 0$, il existe un élément $a_n \in A$ tel que

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n \leq \alpha.$$

Le critère de comparaison implique que la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de points de A qui converge vers α.
Inversement, supposons que α est un majorant de A et qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \alpha$.
Pour montrer que $\alpha = \sup A$, il suffit de montrer le $(ii)'$ de la caractérisation.

Preuve. *(1)* Supposons que $\alpha = \sup A$. D'après la caractérisation de la borne supérieur, pour tout $n > 0$, il existe un élément $a_n \in A$ tel que

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n \leq \alpha.$$

Le critère de comparaison implique que la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de points de A qui converge vers α.
Inversement, supposons que α est un majorant de A et qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \alpha$.
Pour montrer que $\alpha = \sup A$, il suffit de montrer le $(ii)'$ de la caractérisation. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \alpha$, il existe $N \geq n_0$ telle

$$\alpha - \varepsilon < a_N < \alpha + \varepsilon.$$

Puisque $a_N \in A$, on peux conclure. ■

Exemple.

1. Soit $A =]-1, +\infty[$. On a $\inf A = -1$ car -1 est un minorant de A et la suite $\left(-1 + \dfrac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est une suite de points de A qui converge vers -1.
   La partie A n'est pas majorée car la suite $(n)_{n \geq 0}$ est une suite de points de A qui diverge vers $+\infty$.
2. La partie $A = \left\{\sqrt{n} + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ n'est pas majorée car la suite $\left(\sqrt{n} + \dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de points de A qui diverge vers $+\infty$.

Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que

$$x = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que

$$x = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

- Supposons A dense dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n > 0$, il existe $a_n \in A$ tel

  $$x < a_n < x + \frac{1}{n}$$

  Le critère d'encadrement, implique $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x$

Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que

$$x = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

- Supposons A dense dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n > 0$, il existe $a_n \in A$ tel
$$x < a_n < x + \frac{1}{n}$$
Le critère d'encadrement, implique $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x$
- Inversement, soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$. Par hypothèse, il existe une suite $(a_n)_n$ d'élément de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{x+y}{2}$. Alors, pour $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad \left| a_n - \frac{x+y}{2} \right| < \frac{y-x}{2} \Longleftrightarrow x < a_n < y$$

■

Suites arithmétiques

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r \neq 0$ de terme générale :
$u_n = u_0 + nr$ alors $(u_n)_n$ diverge vers l'infini avec le signe r.

Suites arithmétiques

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r \neq 0$ de terme générale :
$u_n = u_0 + nr$ alors $(u_n)_n$ diverge vers l'infini avec le signe r.

Suites géométriques

Soit $(u_n)_n$ suite géométrique de raison q de terme générale : $u_n = u_0 q^n$ alors

- Si $|q| < 1$, la suite converge vers 0.
- Si $q = 1$, la suite $(u_n)_n$ converge vers u_0 (elle est stationnaire).
- Si $q = -1$, la suite diverge.
- Si $q > 1$, la suite (u_n) tend vers l'infini avec le signe de u_0.
- Si $|q| > 1$, la suite $(|u_n|)_n$ tend vers $+\infty$.

Suites arithmético-géométriques

On appelle suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, toute suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par : u_0 donné, $u_{n+1} = qu_n + r$.

Suites arithmético-géométriques

On appelle suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, toute suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par : u_0 donné, $u_{n+1} = qu_n + r$.

Si $(u_n)_n$ est suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, alors

- Si $q = 1$, $u_n = u_0 + nr$, c'est une suite arithmétique.

Suites arithmético-géométriques

On appelle suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, toute suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par : u_0 donné, $u_{n+1} = qu_n + r$.

Si $(u_n)_n$ est suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, alors

- Si $q = 1$, $u_n = u_0 + nr$, c'est une suite arithmétique.
- Si $r = 0$; $u_n = u_0 q^n$, c'est une suite géométrique

Suites arithmético-géométriques

On appelle suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, toute suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par : u_0 donné, $\quad u_{n+1} = qu_n + r$.

Si $(u_n)_n$ est suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, alors

- Si $q = 1$, $u_n = u_0 + nr$, c'est une suite arithmétique.
- Si $r = 0$; $u_n = u_0 q^n$, c'est une suite géométrique
- Si $q \neq 1$, $\quad u_n = q^n(u_0 - a) + a$, avec $a = \frac{r}{1-q}$

Suites arithmético-géométriques

On appelle suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, toute suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par : u_0 donné, $u_{n+1} = qu_n + r$.

Si $(u_n)_n$ est suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, alors

- Si $q = 1$, $u_n = u_0 + nr$, c'est une suite arithmétique.
- Si $r = 0$; $u_n = u_0 q^n$, c'est une suite géométrique
- Si $q \neq 1$, $u_n = q^n(u_0 - a) + a$, avec $a = \frac{r}{1-q}$

Preuve : En utilisant la récurrence, on écrit
$u_n = qu_{n-1}+r = q\,(qu_{n-2} + r)+r = q^2 u_{n-2}+qr+r = \ldots = q^n u_0+r(q^{n-1}+...+1)$
or $q^{n-1} + ... + 1 = \frac{1-q^n}{1-q}$ donc

$$u_n = q^n u_0 + r\frac{1-q^n}{1-q} = q^n\left(u_0 - \frac{r}{1-q}\right) + \frac{r}{1-q}$$

Convergence d'une suite arithmético-géométrique

Si $(u_n)_n$ est suite arithmético-géométrique de paramètres $q \neq 1$ et $r \neq 0$ de terme générale ,

$$u_n = q^n(u_0 - a) + a; \quad a = \frac{r}{1-q}$$

Si $u_0 = a$ alors c'est une suite stationnaire $u_n = u_0, \ \forall n$, sinon on aura

1. Si $|q| < 1$, la suite converge vers a.
2. Si $q > 1$, la suite diverge vers l'infini avec le signe de $(u_0 - a)$.
3. Si $q \leq -1$ la suite diverge.

Exercice (TD). Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 0.8u_n + 2, \;\; n \geq 1$$

On se propose d'étudier la suite de deux manières différentes

1. Donner le terme général u_n en fonction de n puis étudier la nature de la suite $(u_n)_n$.
2. On considère la suite de terme général $v_n = u_n + c$. Trouver $c \in \mathbb{R}$ tel que la suite de terme général v_n soit géométrique
3. Retrouver le résultat de (1).
4. Calculer $T_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots. + u_n$ en fonction de n .
5. Calculer les limites des suites $(T_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$.

Réponse. On a

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 0.8u_n + 2, \;\; n \geq 1$$

(1) $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique de paramétres $r = 2$ et $q = 0,8$, donc

$$u_n = q^n(u_0 - a) + a; \quad a = \frac{r}{1-q}$$

d'où

$$u_n = -8\,(0.8)^n + 10 \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 10$$

$(u_n)_n$ est une suite convergente.

Réponse. On a

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 0.8u_n + 2, \;\; n \geq 1$$

(2) Comme $v_n = u_n + c$, alors on peut écrire

$$v_{n+1} = 0.8u_n + 2 + c = 0.8\left(u_n + \frac{2+c}{0.8}\right)$$

donc $(v_n)_n$ est géométrique de raison 0.8 si $\dfrac{2+c}{0.8} = c$; c.à.d $c = -10$

(3) $(v_n)_n$ est géométrique de raison 0.8 donc son terme générale s'écrit

$$v_n = v_0(0.8)^n = -8(0.8)^n$$

on déduit que

$$u_n = -8\,(0.8)^n + 10 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 10$$

Réponse. On a

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 0.8u_n + 2, \ \ n \geq 1$$

(4) Puisque $(v_n)_n$ est géométrique de raison 0.8, alors

$$\begin{aligned} T_n &= v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n = v_0 \frac{1-(0.8)^{n+1}}{1-0.8} \\ &= -40\left(1-(0.8)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Puisque $u_n = v_n + 10$, on déduit que

$$S_n = T_n + \underbrace{(10+10+\ldots+10)}_{(n+1)\ \ fois} = -40\left(1-(0.8)^{n+1}\right) + 10(n+1)$$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = -40$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ *est* ***une suite récurrente*** *si il existe une fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que*

$$(*) \quad u_{n+1} = f(u_n); \quad u_0 \ \textit{donné}$$

Définition

*On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est **une suite récurrente** si il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$(*) \quad u_{n+1} = f(u_n); \quad u_0 \ \textit{donné}$$

Pour trouver la limite d'une suite récurrente, on peut citer ici deux méthodes :

- ***1ère méthode :*** On essaie de se ramener à une suite non-récurrente en exprimant le terme général comme une fonction de n.
- ***2ème méthode :*** On démontre d'abord que la limite ℓ existe puis on passe à la limite dans $(*)$ ce qui nous ramene à résoudre l'équation

$$\ell = f(\ell)$$

Exemple : Soit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par récurrence :

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n};\ \forall n \geq 1$$

Exemple : Soit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par récurrence :

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}; \ \forall n \geq 1$$

- *1ère méthode :* On calcule

$$u_2 = \frac{4}{3} = \frac{2^2}{2^2-1}, \quad u_3 = \frac{8}{7} = \frac{2^3}{2^3-1}, \quad u_4 = \frac{16}{15} = \frac{2^4}{2^4-1}, \ldots$$

On remarque que les premiers termes de la suite vérifient $\quad u_n = \dfrac{2^n}{2^n-1}$
On démontre, par récurrence, que cette formule est vraie pour tout n, puis on calcule la limite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2^n}{2^n}\frac{1}{1-2^{-n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{1-2^{-n}}$$

or $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$

Exemple : Soit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par récurrence :

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n};\ \forall n \geq 1$$

- *2ème méthode :* On montre d'abord, que la suite est décroissante et minorée par 1. En effet, par récurrence on a

  (*i*) On a $u_1 = 2 \geq 1$.
  (*ii*) On suppose $u_n \geq 1$ donc

$$u_n + u_n \geq 1 + u_n \Longrightarrow 2u_n \geq 1 + u_n \Longrightarrow u_{n+1} \geq 1$$

  d'où, $u_n \geq 1; \quad \forall n \geq 1$.
  D'autre part, on a pour tout $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n} \leq 0 \quad \text{donc la suite est décroissante.}$$

Exemple : Soit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par récurrence :

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n};\ \forall n \geq 1$$

- *2ème méthode :* D'aprés le théorème des suites monotones ; $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ qui sera solution de l'équation :

$$\ell = \frac{2\ell}{1+\ell} \Longleftrightarrow \ell(\ell-1) = 0$$

Cette équation a 2 solutions 0 et 1. Puisque que $u_n \geq 1$ pour tout n alors la limite est donc $\ell = 1$.

Définition

Deux suites réelles $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *sont dites adjacentes si :*

1. *pour tout* $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$,
2. *la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est croissante,*
3. *la suite* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est décroissante,*
4. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Suites adjacentes

Définition

Deux suites réelles $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont dites adjacentes si :

1. *pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$,*
2. *la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante,*
3. *la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante,*
4. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = 0.$

Deux suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite ℓ de plus on a $\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq \ell \leq v_n$

Preuve : On a pour tout $n \geq n_0$ $u_{n_0} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n_0}$ alors (u_n) est croissante et majorée (par v_{n_0}) donc converge vers une limite ℓ_1 et (v_n) est décroissante et minorée (par u_{n_0}) donc converge vers une limite ℓ_2. d'après le point(4)

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = 0 = \ell_1 - \ell_2 \Longrightarrow \ell_1 = \ell_2 = \ell$$

Exemple. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \text{ } et \text{ } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Exemple. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; \qquad 0 \leq u_n \leq v_n$.

Par récurrence :

(*i*) C'est vrai pour $n = 0$ car $0 < u_0 < v_0$.

(*ii*) On suppose $0 \leq u_n \leq v_n$. On aura donc $v_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+1} \geq 0$, de plus

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2}{2} \geq 0$$

d'où

$$0 \leq u_{n+1} \leq v_{n+1}$$

Exemple. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

- Etudier la monotonie des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

On a d'après le résultat précédent

- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \Longrightarrow v_{n+1} \leq v_n$

donc $(v_n)_n$ est une suite décroissante.

- $0 \leq u_n \leq v_n \Longrightarrow u_n^2 \leq u_n v_n \Longrightarrow u_n \leq \sqrt{u_n v_n} = u_{n+1}$

donc $(u_n)_n$ est une suite croissante.

Exemple. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \ et \ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{v_n - u_n}{2}$

On a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}$$

or $u_n \leq \sqrt{u_n v_n} \Rightarrow -\sqrt{u_n v_n} \leq -u_n$, donc on obtient

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$$

Exemple. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \ et \ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

- En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite.

$$\left.\begin{array}{ll} v_n - u_n & \leq \dfrac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2} \\ v_{n-1} - u_{n-1} & \leq \dfrac{v_{n-2} - u_{n-2}}{2} \\ \vdots & \\ v_1 - u_1 & \leq \dfrac{v_0 - u_0}{2} \end{array}\right\} \underset{En \ multipliant}{\Longrightarrow} 0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ d'où $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes et parsuite convergent vers la même limite.

Exercice (TD). On définie par récurrence $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ en posant : $u_0 = 3,\ v_0 = 4$, et si $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{v_n + u_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

1. On pose $w_n = v_n - u_n,\ \forall n \geq 0$. Montrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique positive et calculer sa limite.
2. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
3. On considère à présent la suite $(t_n)_n$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

Montrer que la suite $(t_n)_n$ est constante. En déduire la limite des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Réponse.

1. $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique positive de raison $0 < \dfrac{1}{4} < 1$ et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} w_n = 0$.

Réponse.

1. $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique positive de raison $0 < \dfrac{1}{4} < 1$ et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = 0$.
2.
   - d'aprés (1) on a $0 < w_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$
   - $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante
   - $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$ donc $(u_n)_n$ est décroissante.

   On conclut les deux suites sont adjacentes. Donc elles convergent vers la même limite ℓ.

Réponse.

1. $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique positive de raison $0 < \dfrac{1}{4} < 1$ et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = 0$.
2.
   - d'aprés (1) on a $0 < w_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$
   - $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante
   - $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$ donc $(u_n)_n$ est décroissante.

   On conclut les deux suites sont adjacentes. Donc elles convergent vers la même limite ℓ.
3. On a
$$t_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{v_n + u_n}{2} + 2\frac{u_n + 3v_n}{4}\right) = t_n$$
donc $(t_n)_n$ est constante et parsuite
$$t_n = t_0 = \frac{11}{3}$$
En passant à la limite dans t_n on trouve
$$\frac{\ell + 2\ell}{3} = \frac{11}{3} \Longleftrightarrow \ell = \frac{11}{3}$$

Suites de Cauchy

Définition

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*; \ \textit{tel que} \ \forall p\ , q \geq N_\varepsilon \ \textit{on a} \quad |u_p - u_q| < \varepsilon$$

ou de manière équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*; \ \textit{tel que} \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \textit{on a} \quad |u_{p+n} - u_n| < \varepsilon$$

Suites de Cauchy

Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*;\ \textit{tel que}\ \forall p\ , q \geq N_\varepsilon\ \textit{on a}\quad |u_p - u_q| < \varepsilon$$

ou de manière équivalente

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*;\ \textit{tel que}\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\varepsilon\ \textit{on a}\quad |u_{p+n} - u_n| < \varepsilon$$

Théorème

On a les implications suivantes

$$(u_n)_{n\geq n_0}\ \text{converge} \Longrightarrow (u_n)_{n\geq n_0}\ \text{de Cauchy} \Longrightarrow (u_n)_{n\geq n_0}\ \text{est bornée}$$

La réciproque de la 1 ière implication n'est pas toujours vraie.

Exercice. Montrer que la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ est de Cauchy.
Indication : on pourra utiliser $(n+p)! \geq 2^{n+p-1}$
Réponse. Soient $p, n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!}$$

or $(n+p)! \geq 2^{n+p-1}$, donc

$$0 \leq u_{n+p} - u_n \leq \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-1}} = \frac{1}{2^n}(1 + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}})$$

d'où

$$0 \leq u_{n+p} - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(1 - \frac{1}{2^p})$$

Puisque, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}}(1 - \frac{1}{2^p}) = 0$, alors la suite (u_n) est de Cauchy.

Proposition

On dit qu'une suite $(v_n)_n$ est une suite extraite ou une sous suite d'une suite $(u_n)_n$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

Si la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ, on dit que ℓ est la valeur d'adhérence.

Sous-suites ou Suites extraites

Proposition

On dit qu'une suite $(v_n)_n$ *est une suite extraite ou une sous suite d'une suite* $(u_n)_n$ *s'il existe une application* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

Si la suite $(u_{\varphi(n)})$ *converge vers* ℓ, *on dit que* ℓ *est la valeur d'adhérence.*

Exemple : Soit $u_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$, alors on aura

$$u_{4n} = 1; \quad u_{2n+1} = 0, \quad u_{2n} = (-1)^n$$

$(u_{4n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{2n})_n$ sont des sous suites de $(u_n)_n$ associées respectivement aux applications strictement croissantes

$$\varphi_1(n) = 4n, \quad \varphi_2(n) = 2n + 1, \quad \varphi_3(n) = 2n$$

Proposition

Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergeant vers une limite ℓ est une suite convergeant vers ℓ.

Cette proposition est souvent utilisé pour montrer qu'une suite n'est pas convergente : En pratique, on extrait une sous suite qui diverge, ou bien deux sous suites ayant deux limites distinctes.

Preuve de la proposition :

Tout d'abord ; on peut montrer par récurrence que

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n$$

Proposition

Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergeant vers une limite ℓ est une suite convergeant vers ℓ.

Cette proposition est souvent utilisé pour montrer qu'une suite n'est pas convergente : En pratique, on extrait une sous suite qui diverge, ou bien deux sous suites ayant deux limites distinctes.

Preuve de la proposition :

Soit maintenant $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On suppose que $u_n \longrightarrow \ell$. Montrons que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \longrightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Soit $n > N$. D'après le résultat précédent, $\varphi(n) \geq n \geq N$ et donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. ∎

Exercice (TD). Etudier la suite suivante

$$u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

Réponse. On a

$$u_{3n} = \sin(2n\pi) = 0, \quad et \quad u_{3n+1} = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$

On conclut que $(u_n)_n$ est divergente.

Complétude de $\mathbb{R}$

Théorème de BOLZANO-WIERSTRASS

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Application : Complétude de $\mathbb{R}$

Une suite de nombres réels converge vers une limite finie ℓ si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que $\mathbb{R}$ **est complet**.

Preuve : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
La suite (u_n) est bornée et donc par le théorème de Bolzano-Wierstrass, elle admet une sous suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers une limite ℓ. On va montrer que $(u_n)_n$ converge vers la même limite que cette sous-suite.

Preuve : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
La suite (u_n) est bornée et donc par le théorème de Bolzano-Wierstrass, elle admet une sous suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers une limite ℓ. On va montrer que $(u_n)_n$ converge vers la même limite que cette sous-suite. Comme (u_n) est de Cauchy, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*, ((p,q)^2 \in \mathbb{N}^2, p, q \geq N_1 \Longrightarrow |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2})$$

De plus, on a :

- $\forall A > 0; \exists N_2(A)$ tel que $\forall n \geq N_2(A) \Rightarrow \varphi(n) > A$ car $\varphi(n) \longrightarrow +\infty$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N_3$ tel que $\forall m \geq N_3 \Rightarrow |u_{\varphi(m)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit alors $\varepsilon > 0$, posons $N(\varepsilon) = N_1$. Soit m un entier tel $m \geq \max(N_3, N_2(N_1))$, alors on aura :

$$\forall n \geq N(\varepsilon), \quad |u_n - \ell| < |u_n - u_{\varphi(m)}| + |u_{\varphi(m)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui montre que la suite (u_n) converge vers ℓ. ■

Exercice (TD). Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ pour tout entier n.

1. Montrer que pour tout n on a : $u_n > 0$ et $u_n^2 > 2$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il complet ? (on peut remarquer que la suite $(u_n)_n$ est à valeur dans $\mathbb{Q}$)

Réponse.

(1) On montre par récurrence que pour tout n on a : $u_n > 0$. De même on a $u_0^2 > 2$ et

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - 2 &= \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4u_n^2}\left(u_n^4 - 4u_n^2 + 4\right) \\ &= \frac{1}{4u_n^2}\left(u_n^2 - 2\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

donc $u_n^2 > 2$.

Exercice (TD). Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ pour tout entier n.

1. Montrer que pour tout n on a : $u_n > 0$ et $u_n^2 > 2$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il complet ? (on peut remarquer que la suite $(u_n)_n$ est à valeur dans $\mathbb{Q}$)

Réponse.

(2) On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{u_n^2}) < 1$ donc $(u_n)_n$ est décroissante. De plus $u_n > 0$ et $u_n^2 > 2$ alors la suite $(u_n)_n$ est minorée par $\sqrt{2}$, de plus elle est décroissante donc d'aprés le théorème de la convergence monotone elle converge vers une limite ℓ vérifiant

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell}) \Longleftrightarrow \ell^2 = 2 \Longleftrightarrow \ell = \sqrt{2}$$

Exercice (TD). Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ pour tout entier n.

1. Montrer que pour tout n on a : $u_n > 0$ et $u_n^2 > 2$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il complet ? (on peut remarquer que la suite $(u_n)_n$ est à valeur dans $\mathbb{Q}$)

Réponse.

(3) $(u_n)_n$ est une suite dans $\mathbb{Q}$ convergente donc c'est une suite de Cauchy mais sa limite n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. On conclut que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Fin